ماجراهای کلاس ریاضی

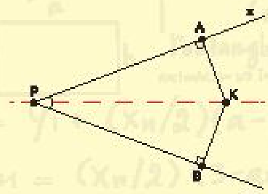
حرف درست را از فرض درست بشنوید

چالش‌های نیم‌سازی

داوود معصومی مهوار

من: در آزمون هفتهٔ پیش یک سـؤال جالب وجود داشت. بعضی از شما خواسته بودید که در کلاس مطرح شود. قضیه این بود: «ثابت کنید هر نقطه روی نیم‌ساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.» خب داوطلبی می‌خواهیم که همان راهی را که در کلاس رفتیم، بیان کند.

سارا: نقطهٔ دلخواه K را بر نیم‌ساز زاویهٔ xPy در نظر می‌گیریم و تصویرهای K بر ضلع‌های xP و yP را به ترتیب نقطه‌های A و B می‌نامیم.



بنابر تعریف نیم‌ساز، دو زاویهٔ APK و BPK اندازه‌های برابر دارند و ضلع KP نیز در دو مثلث AKP و BKP مشترک است. از طرف دیگر، چنان که گفتیم A و B تصویرهای K بر xP و yP هستند، پس زاویه‌های KAP و KBP قائمه‌اند یعنی روشن شد که دو مثلث KAP و KBP قائم‌الزاویه‌اند، دارای وتر مشترک هستند و یک زاویهٔ تند برابر نیز دارند. پس به حالت برابری اندازهٔ وتر و یک زاویهٔ تند هم‌نهشت هستند. می‌دانیم که اجزای نظیر دو مثلث هم‌نهشت هم اندازه‌اند، پس به خاطر برابری دو زاویهٔ KPA و KPB، ضلع‌های روبه‌رو به این دو زاویه نظیر هم هستند و باید هم‌اندازه باشند. بنابراین دو پاره‌خط KA و KB هم‌طول هستند. یعنی ثابت شد نقطهٔ P که روی نیم‌ساز زاویهٔ xPy جای دارد، از دو ضلع این زاویه به یک فاصله است.

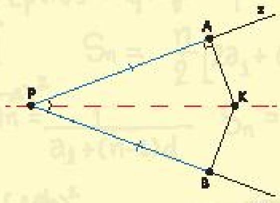
من: سارا خیلی خوب و دقیق راه‌حل قبلی‌مان را شرح داد. کسی هم اعتراضی ندارد. پس می‌رویم سراغ راه‌های دیگری که در آزمون نوشته بودید. نرگس اول تو راه خودت را بگو.

نرگس: راه من تقریباً همین راه سارا بود، ولی کوتاه‌تر. من از همان اول سراغ اجزای نظیر رفتم و از اینکه دو زاویهٔ KPA و KPB برابر هستند، نتیجه گرفتم که طول ضلع‌های روبه‌رو به آن‌ها، یعنی KA و KB باید برابر باشد. پس حکم ثابت شده است.

مریم: راه نرگس درست نیست. اجزای نظیر فقط در دو مثلث هم‌نهشت معنا دارند. اگر ندانیم دو مثلث هم‌نهشت هستند، حق نداریم اجزای نظیر آن‌ها را هم اندازه بدانیم. نرگس نخست باید هم‌نهشتی دو مثلث KPA و KPB را ثابت کند تا بعد بتواند از اجزای نظیر آن‌ها کمک بگیرد.

من: کاملاً درست می‌گویی و اگر نرگس این نقص راه خود را برطرف کند، دقیقاً راهش راه سارا خواهد بود؛ بدون هیچ تغییری. خب نفر بعدی ساناز است. راه‌حلت را بگو.

ساناز: من از آغاز جور دیگری فکر کردم. نقطهٔ دلخواه K را بر نیم‌ساز گرفتم و از آن عمودی بر ضلع xP کشیدم و پای عمود را A نامیدم. سپس پاره‌خط PB را روی ضلع yP از زاویهٔ xPy هم اندازه با پاره‌خط PA جدا کردم.



پس دو ضلع PA و PB در دو مثلث KPA و KPB هم‌اندازه هستند. از طرف دیگر، ضلع KP در این دو مثلث مشترک است و اندازهٔ دو زاویهٔ KPA و KPB نیز بنا بر تعریف نیم‌ساز باید برابر باشد. در نتیجه دو مثلث KPA و KPB به حالت برابری اندازهٔ دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها هم‌نهشت هستند. از آنجا که در این دو مثلث هم‌نهشت دو ضلع KA و KB روبه‌رو به زاویه‌های هم‌اندازهٔ KPA و KPB قرار دارند، اجزای نظیر محسوب می‌شوند و باید هم‌اندازه باشند. پس حکم ثابت شده است. یعنی KA و KB هم‌طول هستند.

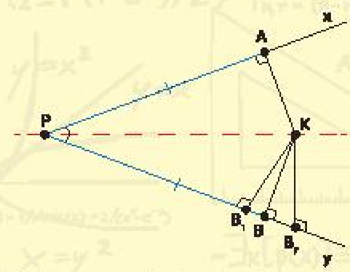
اعظم: من مخالفم. فکر می‌کنم راه ساناز ناقص است. قرار بود ثابت کنیم که هر نقطهٔ دلخواه مانند K که روی نیم‌ساز زاویهٔ xPy باشد، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. آنچه ساناز ثابت کرد برابری طول KA و KB بود. قبول دارم که طبق گفته‌های ساناز طول KA همان فاصلهٔ K از xP است، ولی ساناز حتی اشاره هم نکرد که فاصلهٔ K از yP چیست و چه ربطی به KB دارد.

ساناز: اعظم درست می‌گوید من راهم را کامل می‌کنم. وقتی پی بردیم که دو مثلث KPA و KPB هم‌نهشت هستند، توجه می‌کنیم که ضلع KP در دو مثلث مشترک است، پس دو زاویهٔ KAP و KBP که هر دو روبه‌روی KP هستند، باید اجزای نظیر باشند و هم‌اندازه. پس زاویهٔ KBP نیز مانند زاویهٔ KAP قائمه است و به همین خاطر طول KB همان فاصلهٔ K از ضلع yP است. حالا برابری طول KA و KB که قبلاً ثابت کردم، کار را تمام می‌کند.

لیلا: من هنـــوز مخالفم. وقتی گفته شـــده اســـت ثابت کنید «فاصله‌های K از دو ضلع xP و yP یکســـان اســـت» ما باید در همان آغاز عمودهای KA و KB را بکشیم و برابری طول آن‌ها را اثبات کنیم. نه اینکه یکی از عمودها را بکشیم و ثابت کنیم که این عمود طولی برابر با یک پاره‌خط دیگر دارد و در آخر ثابت کنیم که آن پاره‌خط نیز عمود است.

ساناز: واقعـــاً چه فرقی دارد؟ هر دو برابری پاره‌خط‌های یکسانی را ثابت کرده‌ایم!

من: مطمئن نباش! تنها در صورتـــی می‌توانی بگویی که هر دو برابری پاره‌خط‌های یکســـانی را ثابت کرده‌اید که بدانی «از یک نقطه بیرون یک خط تنها یک عمود بر آن خط می‌توان کشید.» وگرنه شاید چند عمود وجود داشته باشد و تو برابری طول یکی از آن‌ها را با طول عمود وارد از K بر xP ثابت کرده باشـــی. شکل زیر را ببین.



ساناز: خب من فکر می‌کنم راه‌حل سارا هم همین اشکال را دارد! مگر او ثابت کرد که تنها یک عمود می‌توان کشید؟

من: نه، او ثابت نکرد، ولی دقیقاً کاری را کرد که مســـئله خواسته بود. او از K دو عمود بر xP و yP کشـــید و برابری طول آن‌ها را به کمک قضیه‌ای ثابت کرد. از این نظر راه او از راه تو کامل‌تر است. ولی اگر بخواهیم خیلی‌خیلی دقیق شویم، باید از سارا هم انتظار داشته باشیم که ربط عمودهای کشیده شده را به فاصله‌های خواسته شده، بیان کند. در حقیقت در هندسه دو قضیه داریم به این شرح:

قضیهٔ الف: «از یک نقطه بیرون یک خط یک و تنها یک عمود می‌توان بر آن خط کشید.»

قضیهٔ ب: «بیـــن پاره‌خط‌هایـــی که متکی به یـــک خـــط (مانند خـــط e) و یک نقطهٔ بیرون از آن خط (مانند نقطهٔ S) هســـتند، پاره‌خط عمود کوتاه‌ترین طول را دارد و این طول یکتا فاصلهٔ نقطهٔ S از خط e نامیده می‌شود.»

اصطلاح «پاره‌خط متکی به نقطهٔ S و خط e» را به کار بردم تا اگر در کتابی آن را دیدید وحشت نکنید. یعنی پاره‌خطی که یک سر آن S است و سر دیگر آن روی خط e جای دارد.

پس ســـارا می‌توانســـت با اشـــاره به قضیهٔ ب، یادآوری کند که فاصله‌های خواسته شده در صورت مسئله طول همان عمودهایی هســـتند که او از K بر Px و Py کشیده اســـت. باز هم یادآوری می‌کنم که در برنامهٔ درســـی ما این قدر دقت لازم و مورد انتظار نیست، ولی چون پرسیدید، اشـــاره کردم. اما ساناز از همان آغاز اصلاً سراغ کشیدن عمود نرفت و پاره‌خط دیگری را بررسی کرد. پس انتظار می‌رود که او حتماً ربط این پاره‌خط به خواستهٔ مسئله را بیان کند. در واقع ایرادی که اعظم گرفت بسیار درست است و باید برطرف شود، ولی ایرادی که لیلا گرفت خیلی دقیق است و در برنامهٔ درسی ما می‌توان از آن چشم‌پوشی کرد.

زهرا: من مشکل راه ســـاناز را جور دیگری برطرف می‌کنم. من فکر می‌کنم اگر حتی چند پاره‌خط عمود وجود داشـــته باشند، باز هم مشکلی نخواهیم داشت. مثلاً در مثلث ABB_1 به سادگی می‌تـــوان دید که مثلث دو زاویهٔ برابـــر دارد، پس بنا بر قضیه‌ای متساوی‌الساقین است و دو ساق AB و AB_1 باید هم اندازه باشند.

من: راســـتش تحلیل آنچه گفتی دقت بســـیاری می‌طلبد و از حوصلهٔ برنامهٔ درســـی ما بیرون است، ولی همین قدر بدانید که برای نتیجه‌گیری یک مطلب درســـت حتمـــاً باید از یک مطلب درست شروع کرد. با شروع از مطلب نادرست معلوم نیست که به مطلبی درســـت برسیم و ممکن است از هر جایی سر در بیاوریم. مثـــلاً توجه کنید که از ۳=۴ به ســـادگی و با ضرب دو طرف در ۲ می‌توان به ۶=۸ رســـید که می‌دانیم مطلب درستی نیست. از طـــرف دیگر می‌توان دو طرف ۳=۴ را با دو طرف ۴=۳ جمع کرد و به ۷=۷ رسید که قطعاً درست است. یعنی اگر مطمئن نباشید که از مطلبی درست شـــروع کرده‌اید، نمی‌توانید مطمئن شوید که به مطلبی درست رسیده‌اید. پس تأکید می‌کنم که شما فعلاً چنین کارهایی نکنید و تنها در صورتی که مطمئن هستید مطلب درستی را می‌دانید، آن را پایه قرار دهید و نتیجه‌های بعدی را از آن بگیرید بگذریم. حالا نسرین راه خود را بگوید.

نســـرین: من از قضیهٔ فیثاغورس کمک گرفتم در همان شکل سارا، برای دو مثلث KPA و KPB قضیهٔ فیثاغورس را نوشتم:

$$\begin{cases}\overline{KP}^2 = \overline{KA}^2 + \overline{AP}^2 \\ \overline{KP}^2 = \overline{KB}^2 + \overline{BP}^2\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\overline{KA}^2 = \overline{KP}^2 - \overline{AP}^2 \\ \overline{KB}^2 = \overline{KP}^2 - \overline{BP}^2\end{cases} \rightarrow \overline{KA}^2 = \overline{KB}^2$$

من: دو تا مشـــکل هســـت. یکی اینکه هنوز قضیهٔ فیثاغورس را نخوانده‌ایم و بلد نیستیم و مهم‌تر اینکه از کجا می‌دانی که AP و BP هم‌اندازه هستند؟ اگر نباشند استدلال تو اصلاً درست نیست و به درد نمی‌خورد.

نسرین: خب می‌توانیم عمود KB را طوری بکشیم که طول PB برابر با طول PA بشود.

سوده: این کار شدنی نیست. اگر می‌خواهیم عمود بکشیم باید عمود بکشیم، نمی‌توانیم جوری عمود بکشیم که فلان خاصیت را هم داشته باشـــد. در حقیقت چون تنها یک عمود می‌توان از یک نقطه بر یک خط کشـــید، ما اگر لازم داشتیم می‌توانیم آن یک عمود را بکشیم. ســـپس اگر آرزو داشتیم که آن عمود یک ویژگی دیگر نیز داشته باشد، باید داشتن آن ویژگی را ثابت کنیم؛ نه اینکه بگوییم «عمود را جوری می کشـــیم که آن ویژگی را هم داشته باشد.»

من: سوده درست می‌گوید. مثلاً می‌دانیم که از دو نقطهٔ متمایز یک و تنها یک خط راســـت می‌گذرد. پس اگر در مسئله‌ای لازم داشتیم که خط گذرنده از دو نقطهٔ S و T را بررسی کنیم، کافی است که این خط گذرنده را نام‌گذاری کنیم و سپس بررسی کنیم و مثلاً ثابت کنیم که این خط بر خط f عمود است. اما حق نداریم بگوییم «از S و T خطی می‌گذرانیم که بر f نیز عمود باشد!»

نسرین: کلـــک می‌زنید! به سارا و ساناز می‌گویید «شاید چند تا خط عمود وجود داشته باشد»، ولی به من می‌گویید «چون تنها یک خط عمود وجود دارد، حق نداری فلان کار را بکنی!»

من: بار دیگر تأکید می‌کنم ایرادی که از ساناز گرفتیم بسیار دقیق بود و در حد برنامهٔ درســـی ما نیست، ولی مهم است که اشتباه نسرین را تکرار نکنید. چنین اشتباهی هیچ جایی قابل چشم‌پوشی نیســـت. بار دیگر گفته‌های لیلا را به یاد بیاورید و ببینید که چه ایراد دقیقی گرفته اســـت. همچنین گفته‌های سوده یا مرا را نیز مرور کنید تا ببینید نســـرین چه اشتباه بزرگی انجام داده است. وقتمان تمام است. شاید باز هم در این باره گفت‌وگو کنیم.